

H-ARQ 信道上高性能全分集 LDPC 码的构造与性能分析

郭锐¹, 胡方宁¹, 刘济林²

(1. 杭州电子科技大学 通信工程学院, 浙江 杭州 310018; 2. 浙江大学 信息与电子工程系, 浙江 杭州 310027)

摘 要: 为了提高混合自动重传请求 (H-ARQ) 系统的通信性能, 研究了 H-ARQ 块衰落信道上全分集低密度奇偶校验 (LDPC) 码的构造与性能。首先分析了 H-ARQ 块衰落信道的中断概率及其固有分集, 然后构造了在 H-ARQ 块衰落信道上能取得全分集的 LDPC 码, 新构造的码字采用根校验节点把每次传输联系起来, 从而获得全分集。在此基础上, 分析了全分集 LDPC 码的结构, 提出了通过提高全分集校验比特的比例, 改善全分集 LDPC 码在 H-ARQ 信道上编码增益的方法。仿真结果表明, 所提算法在 H-ARQ 信道上不仅能取得全分集, 而且具有较高的编码增益。

关键词: H-ARQ; 块衰落; 全分集; LDPC; 编码增益

中图分类号: TN911

文献标识码: A

文章编号: 1000-436X(2012)04-0069-08

High performance full diversity LDPC codes construction and performance analysis for H-ARQ channels

GUO Rui¹, HU Fang-ning¹, LIU Ji-lin²

(1. Communications College, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China;

2. Department of Information Science and Electronic Engineering Zhejiang University, Hangzhou 310027, China)

Abstract: In order to improve the performance of communication system with hybrid automatic repeat request (H-ARQ), a kind of full diversity low density parity check (LDPC) codes on H-ARQ block-fading channels was proposed. First, the outage probability and inherent diversity were analyzed, then a kind of full diversity LDPC codes for H-ARQ channel was designed. The new proposed LDPC codes connected the initial transmission with the repeated transmissions by root-connection to get extern diversity gain. In addition, the relationship between the structure of full diversity LDPC codes and the coding gain was given, and an algorithm to improve coding gain was brought forward by increasing the proportion of full diversity parity bits. Simulation results show that the proposed algorithm can not only achieve full diversity, but also get better performance than constructed LDPC codes at present.

Key words: H-ARQ; block-fading; full diversity; LDPC; coding gain

1 引言

ARQ 技术是一种简单有效应对无线信道时变特性, 降低系统错误概率的技术。当接收端不能正确译码时, ARQ 技术要求发送端重传。H-ARQ 技

术结合了 ARQ 和 FEC, 在接收端组合第 1 次传输 (Tx1) 与重传信息 (ReTx), 从而获得更高的可靠性^[1]。可以重传一次, 也可以重传多次。如果信道相干时间很短, 重传与原始传输经历相互独立的信道衰落, 从而获得分集增益。

收稿日期: 2011-09-27; 修回日期: 2012-03-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (60972049); 浙江省自然科学基金资助项目 (Y1100579)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China(60972049); The Natural Science Foundation of Zhejiang (Y1100579)

近年来,针对全分集 LDPC 码的研究越来越多^[2-5]。文献[6,7]提出了采用 root LDPC 码的方法,解决在块衰落数目为 2 的信道上,应用 BP 迭代译码时的全分集问题,但其仅仅分析了块衰落信道数目为 2 的简单情况;文献[8]研究了基于 CPC 的 LDPC 码在 H-ARQ 信道上的性能,但不能获得全分集;文献[9]研究了 H-ARQ 信道上一次重传的 LDPC 码全分集问题,但对多次重传没有涉及,而且,构造的码字编码增益较低;文献[10]研究了 ARQ 块衰落信道上基于校验分裂的全分集 LDPC 码性能,但其在重传过程中,只是采用了重复编码的方式,并未提高编码增益。

本文提出了一种在任意次重传的 H-ARQ 块衰落信道上能取得全分集的高性能 LDPC 码。首先,研究了 H-ARQ 信道中断概率以及固有分集;然后,构造了全分集 LDPC 码,分析了所构造码字取得全分集的原理;最后,研究了全分集 LDPC 码字的结构,提出了通过校验比特分割,提高全分集校验比特比例,改善全分集 LDPC 码在 H-ARQ 信道上编码增益的方法。

2 H-ARQ 信道的固有分集

H-ARQ 主要分为 2 类:第 1 类 H-ARQ 和第 2 类 H-ARQ。第 2 类 H-ARQ 对出错的数据帧只是简单的丢弃,没有充分利用其中的有用信息;第 2 类 H-ARQ 对接收的数据帧进行合并,从而提高了纠错性能。其中广泛使用的增加冗余 H-ARQ (IR-H-ARQ) 即第 2 类 H-ARQ,它在重传时增加冗余,提高了纠错性能,但其重传信息与第 1 次传输的信息完全一样。为了提高 H-ARQ 通信速率,H-ARQ 在重传时可以增加额外的信息比特。本文主要研究第 2 类 H-ARQ 信道。

假设长度为 K 的信息比特 u_i , 编码成二进制 LDPC 码,编码后码字为 $c_{1,i}$, 长度为 N_1 , 码率为 $R_{c1} = K/N_1$ 。如接收端不能正确译码接收到的信息比特 u_i , 需要发送端重传。假设重传的信息为 u'_i , 长度为 K' , u'_i 可以与 u_i 完全一样 ($K'=K$), 即简单 IR-H-ARQ, 也可以在重传时包含新的信息 ($K'>K$)。编码后码字为 $c_{2,i}$, 其长度 N_2 。上述 2 种情况如图 1 所示。

把 2 次传输看出一个完整的传输过程,码字长度 $N = N_1 + N_2$, 码率 $R_c = K'/N$ 。

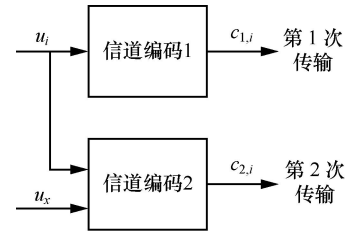


图 1 H-ARQ 编码示意 (当 $c_{1,i}$ 不能被正确译码时,发送端重传 $c_{2,i}$)

如果信道的相干时间很短,将 H-ARQ 信道近似为独立的块衰落信道,假设第 1 次传输时其衰落系数为 α_1 ,当接收端不能正确译码时,发送端重传。重传时,信道的衰落系数为 α_2 。 α_1, α_2 服从相互独立的瑞利分布。则传输过程的瞬时信噪比表示为 $\gamma_1 = |\alpha_1|^2 \gamma$ 和 $\gamma_2 = |\alpha_2|^2 \gamma$, 其中, $\gamma = E_s/N_0$ 是每符号平均信噪比。

一个信道的固有分集 d 定义为

$$d = - \lim_{\gamma \rightarrow +\infty} \log(P_e) / \log(\gamma)$$

其中, P_e 为中断概率。中断事件 E_0 表示瞬时互信息小于传输速率,通常由一个特殊的区域决定,其横纵坐标分别对应于瞬时信噪比。

$$E_0 = (I_1(\gamma_1) < R_{c1}) \cap (I_2(\gamma_1, \gamma_2) < R_c) \quad (1)$$

$I_1(\gamma_1)$ 是第 1 次传输时的瞬时互信息。当 $I_1(\gamma_1) < R_{c1}$ 时,需要重传。由于在块衰落信道上取得全分集的充分必要条件是在块删除信道上能取得全集^[2]。在高信噪比情况下,块删除信道可以看成是块衰落信道的一种特殊情况。

当采用 BPSK 调制时,ARQ 块衰落信道可以看成是 N 个并行信道的,每个信道携带 1bit 信息。因此,归一化的联合互信息表示为^[12,13]

$$I(\gamma_1, \gamma_2) = \frac{N_1}{N} I_1(\gamma_1) + \frac{N_2}{N} I_1(\gamma_2) \quad (2)$$

中断概率通过对概率分布函数在中断事件包含的区域里积分得到:

$$p_{out}(\gamma) = \iint_{E_0} p(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (3)$$

其中, α_{10} 为中断边界线与横轴 α_1 的交点, α_{20} 为中断边界线与纵轴 α_2 的交点。于是,中断概率分布为

$$p_{out}^{up} = \int_0^{\alpha_{10}} \int_0^{\alpha_{20}} p(\alpha_1, \alpha_2) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (4)$$

由于 α_1, α_2 服从相互独立的瑞利衰落分布,因此: $p(\alpha_1, \alpha_2) = 4\alpha_1\alpha_2 e^{-\alpha_1^2 - \alpha_2^2}$, 则有

$$p_{\text{out}}^{\text{up}} = (1 - e^{-\alpha_{20}^2})(1 - e^{-\alpha_{10}^2}) \quad (5)$$

采用泰勒展开得到:

$$p_{\text{out}}^{\text{up}} = e^{-\alpha_{20}^2} e^{-\alpha_{10}^2} + O(\alpha_{20}^2 \alpha_{10}^2) \quad (6)$$

其中, $O(\alpha_{20}^2 \alpha_{10}^2)$ 表示 $\alpha_{20}^2 \alpha_{10}^2$ 的高阶无穷小。显然:

$p_{\text{out}}^{\text{up}} \propto \frac{1}{\gamma^2}$, 于是一次重传 H-ARQ 信道的固有分集为 2。

当传输次数 n_c 大于 2 时 (重传次数大于 1 次), 其中断事件表示如下:

$$E_0 = (I_1(\gamma_1) < R_{c1}) \cap (I_2(\gamma_1, \gamma_2) < R_{c2} \cap \dots \cap (I_{n_c}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_c}) < R_c)) \quad (7)$$

$I_1(\gamma_1)$ 为第 1 次传输时的瞬时互信息, $I_{n_c}(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_c})$ 为 n_c 次传输的互信息。同理有

$$I(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_c}) = \frac{N_1}{N} I_1(\gamma_1) + \frac{N_2}{N} I_1(\gamma_2) + \dots + \frac{N_{n_c}}{N} I_1(\gamma_{n_c}) \quad (8)$$

其中, $N_i (1 \leq i \leq n_c)$ 为每次传输的码字的长度,

$$N = \sum_{i=1}^{n_c} N_i。$$

采用与一次重传相同的方法, 定义 α_{10} 为中断边界与横轴 α_1 的交点, α_{20} 为中断边界与纵轴 α_2 的交点, \dots , $\alpha_{n_c 0}$ 为中断边界与 α_{n_c} 的交点。则有

$$p_{\text{out}}^{\text{up}} = e^{-\alpha_{20}^2} e^{-\alpha_{10}^2} \dots e^{-\alpha_{n_c 0}^2} + O(\alpha_{20}^2 \alpha_{10}^2 \dots \alpha_{n_c 0}^2) \quad (9)$$

显然: $p_{\text{out}}^{\text{up}} \propto \frac{1}{\gamma^{n_c}}$, 即对每次传输相互独立的块衰落信道, 其固有分集数即为传输次数。

3 H-ARQ 信道上全分集 LDPC 码的构造

由上节分析可知, 若每次传输经历的衰落系数相互独立, 则信道的固有分集数等于传输次数。本节构造在 H-ARQ 信道上能取得全分集的码字 (即码字的分集阶数等于信道的固有分集)。H-ARQ 信道可用如下公式来描述:

$$\mathbf{y}_i = \alpha_i \mathbf{x}_i + \mathbf{z}_i \quad (1 \leq i \leq n_c) \quad (10)$$

其中, \mathbf{x}_i , \mathbf{y}_i , \mathbf{z}_i 分别为第 i 次传输时的发送信号, 接收信号以及噪声。假设 H-ARQ 信道传输次数为 2 ($n_c = 2$), 每次传输经历的衰落系数分别记为 α_1 和 α_2 。信息比特 $1i$ 第 1 次传输, 其经历衰落为 α_1 , 信息比特 $2i$ 第 2 次传输, 其经历衰落系数为 α_2 , 奇

偶校验比特也分成 2 部分 $1p$ 和 $2p$ 。图 2 给出了构造的全分集 LDPC 码 Tanner 图及校验矩阵, 称为根校验全分集 LDPC 码。图中 \mathbf{I} 为单位矩阵, 其余子矩阵随机生成。其中, $1C$ 、 $2C$ 为根校验节点, $1C$ 通过度数为 1 的根连接与第 1 次传输的信息比特 $1i$ 相连, 而与第 2 次传输的信息比特 $2i$ 、奇偶校验比特 $2p$ 则以任意度数连接, 其度数由 \mathbf{H}_{2i} 、 \mathbf{H}_{2p} 的列重决定; $2C$ 遵循同样的规则。连线上的数字表示连接的度数。

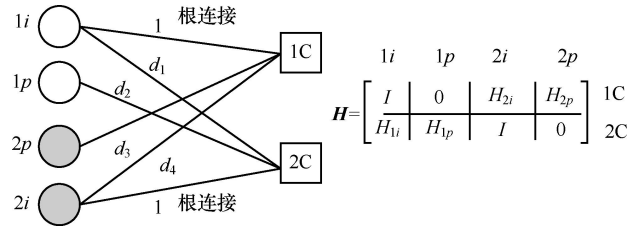


图 2 根校验全分集 LDPC 码的 Tanner 图及其校验矩阵 ($n_c=2$)

可以看到根校验节点把不同传输信道联系起来, 从而获得额外的分集。

证明如下: 考察度数为 δ 的根校验节点 ϕ , $A_i^\alpha, i=1, \dots, \delta-1$ 为与之相连的信息比特节点传递给校验节点的对数似然比 (LLR), 则迭代译码输出的 LLR 如下^[1]:

$$A^e = 2 \text{th}^{-1} \left(\prod_{i=1}^{\delta-1} \text{th} \left(\frac{A_i^\alpha}{2} \right) \right) \quad (11)$$

$\text{th}(x)$ 表示双曲正切函数, α 为先验消息, e 为迭代译码时传递的外部消息。由于最小和译码算法是次优的迭代译码算法, 如果次优译码算法能取得全分集, 则最优译码算法也能取得全分集。因此, 为了简化分析的复杂度, 采用最小和译码算法来简化分析, 于是上式简化为

$$A^e = \min(|A_i^\alpha|) \prod_{i=1}^{\delta-1} \text{sign}(A_i^\alpha) \quad (12)$$

如果发送端发送全 0 码字, 则 α_j 传输的交叉概率信息即由 α_j 传给下一次传输的信息 ($j=1, 2$):

$$\psi_j = Q(\sqrt{2\gamma\alpha_j^2}) = Q(\sqrt{2\gamma}\alpha_j) \quad (13)$$

任一信息比特在信道 α 传输的先验信息为^[13]

$$A_0 = \log \left(\frac{p(y|\mathcal{G}=0, \alpha)}{p(y|\mathcal{G}=1, \alpha)} \right) = \frac{2\alpha y}{\sigma^2} = \frac{2}{\sigma^2} (\alpha^2 + \alpha z) \quad (14)$$

其中, $y = \alpha + z$, $z \sim N(0, \sigma^2)$ 。在第 1 次迭代时,

式(12)中的 A_i^α 都具有式(14)形式。考察 li 中度数为 ξ 信息比特 θ ，除了具有先验消息外，还要接收来自校验节点的外部消息： $A_j^e, j=1,2,\dots,\xi$ 。对于 $n_c=2$ 的 H-ARQ 信道而言， $\xi \geq 2$ 。 θ 分别与 1C, 2C 连接。因此， θ 的后验信息为

$$A = A_0 + \sum_{j=1}^{\xi} A_j^e \quad (15)$$

A_1^e 指 1C 中与 θ 相连的根校验节点传递的外部信息。 $P_e(li_i)$ 表示 li_i 中的错误概率，它主要由 A 中的前 2 项 $A_0 + A_1^e$ 决定。 $\sum_{j=1}^{\xi} A_j^e$ 并不能影响 $P_e(li_i)$ ，

这是因为与非根校验节点概率密度的卷积仅仅能够更新最后的密度。因此，对于考察分集阶数而言，只需证明 $A_0 + A_1^e$ 能导致全分集。其中， A_1^e 由式(12)计算得到。输入到根校验节点 1C 的消息以 ψ_2 的概率取负。于是：

$$A_1^e = S_1 \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_2^2 + \alpha_2 z_1)$$

$$\text{其中, } S_1 = \sum_{i \text{ even}} \binom{\xi-1}{i} \psi_2^i (1-\psi_2)^{\xi-1-i} - \sum_{i \text{ odd}} \binom{\xi-1}{i} \psi_2^i (1-\psi_2)^{\xi-1-i}$$

$$\text{即 } A_1^e = (1-2\psi_2)^{\xi-1} \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_2^2 + \alpha_2 z_1) \quad (16)$$

则后验消息的前 2 项：

$$\begin{aligned} & A_0 + A_1^e \\ &= \frac{2}{\sigma^2} (\alpha_1^2 + (1-2\psi_2)^{(\xi-1)} \alpha_2^2 + \alpha_1 z_0 + (1-2\psi_2)^{(\xi-1)} \alpha_2^2) \end{aligned} \quad (17)$$

令 $T = \alpha_1^2 + (1-2\psi_2)^{(\xi-1)} \alpha_2^2$ ，其服从 4 阶 χ^2 分布。当信噪比 $E_b/N_0 \rightarrow \infty$ 时， $T \rightarrow \alpha_1^2 + \alpha_2^2$ ，由分集阶数的定义可知，其分集阶数为 2，即取得了全分集。

当传输次数 n_c 大于 2，采用类似的方法。信息比特记为 $1i, 2i, \dots, n_c i$ ， $1i$ 在 α_1 上传输， $2i$ 在 α_2 上传输， $\dots, n_c i$ 在 α_{n_c} 上传输。奇偶校验比特也分成 n_c 部分，采用上述类似的方法可以证明：

$$A_0 + A_1^e \propto \omega_1 \alpha_1^2 + \omega_2 \alpha_2^2 + \dots + \omega_{n_c} \alpha_{n_c}^2 \quad (18)$$

即式(18)服从自由度为 $2n_c$ 的 χ^2 分布。根据分集的定义，可知道其分集阶数为 n_c ，获得了全分集。

普通块衰落信道的每个子信道是完全对称的，每个子信道都要求能获得校验。与普通块衰落信道

而言，H-ARQ 信道只需要通过重传恢复出上次传输的信息。于是对 $n_c=2$ 的 H-ARQ 信道，Tanner 图以及校验矩阵可以简化为如图 3 所示形式：

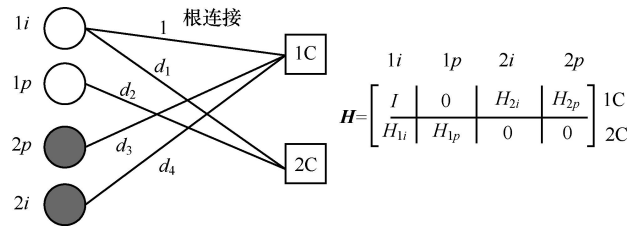


图 3 针对 H-ARQ 信道的根校验全分集 LDPC 码的 Tanner 图及其校验矩阵 ($n_c=2$)

当 $n_c=3$ ，相应的编码矩阵如下：

$$H = \begin{bmatrix} I & 0 & I & 0 & H_{3i} & H_{3p} \\ I & 0 & H_{2i} & H_{2p} & 0 & 0 \\ H_{1i} & H_{1p} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

4 高编码增益全分集 LDPC 码的构造

为了分析全分集 LDPC 码的编码增益，先定义以下变量：比特节点平均度数 \bar{d}_b ；校验节点平均度数 \bar{d}_c ；归一化的行度数分布 $\dot{\lambda}(x)$ ；归一化的列度数： $\dot{\rho}(x)$ 。则有

$$\bar{d}_b = 1 / \sum_{i=2}^{d_b} \lambda_i / i, \quad \bar{d}_c = 1 / \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j / j \quad (20)$$

$$\dot{\lambda}(x) = \bar{d}_b \sum_{i=2}^{d_b} \lambda_i / i x^{i-1}, \quad \dot{\rho}(x) = \bar{d}_c \sum_{j=2}^{d_c} \rho_j / j x^{j-1} \quad (21)$$

d_b 表示比特节点度数最大值， d_c 表示校验节点度数最大值； λ_i 是度数为 i 的比特节点数目占总比特节点数目的比例， ρ_j 是度数为 j 的校验节点数目占总校验节点数目的比例。

如果 $\tilde{\lambda}(x)$ 表示从每个节点删除一条边，新的度数分布。 $\bar{d}_b - 1$ 表示新的平均度数， $\dot{\lambda}(x)/x$ 表示新的归一化度数系数，则有

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}(x) &= \frac{\bar{d}_b}{\bar{d}_b - 1} \sum_{i=1}^{d_b-1} i \lambda_{i+1} / (i+1) x^{i-1}, \tilde{\rho}(x) \\ &= \frac{\bar{d}_c}{\bar{d}_c - 1} \sum_{j=1}^{d_c-1} j \rho_{j+1} / (j+1) x^{j-1} \end{aligned} \quad (22)$$

以传输次数 $n_c=2$ 为例，如图 4 所示，假设与

根校验节点 1C 相连的边的集合为 S_E (除去根连

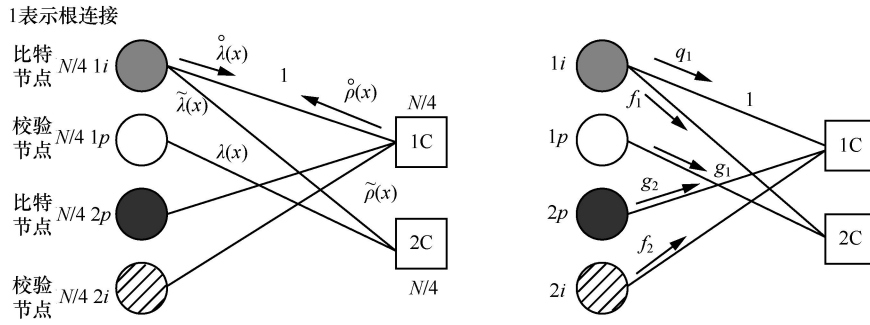


图4 H-ARQ 信道上根校验全分集 LDPC 码 Tanner 图以及消息传递 ($n_c=2$)

接), $S_E = S_{1i} \cup S_{1p}$ 。其中, $|S_{1i}|$ 为 $2i$ 与 1C 相连的边的数量, $|S_{1p}|$ 为 $2p$ 与 1C 相连的边的数量。定义 f_e 为 S_E 中 S_{1i} 所占的比例, g_e 为 S_E 中 S_{1p} 所占的比例, 则有

$$f_e = \frac{|S_{1i}|}{|S_{1i}| + |S_{1p}|} = \frac{\sum_i (i-1)\lambda_i / i}{\sum_i (i-1)\lambda_i / i + 1} = \frac{\bar{d}_b - 1}{2\bar{d}_b - 1},$$

$$g_e = 1 - f_e \quad (23)$$

可见, 全分集 LDPC Tanner 图包含 4 种类型的变量 ($1i, 1p, 2i, 2p$), 2 种根校验节点 (1C, 2C) 和 5 条不同的边。用变量 x_1, x_2, \dots, x_5 分别表示在以下边上迭代的消息: $1i \rightarrow 1C, 1i \rightarrow 2C, 2i \rightarrow 1C, 1p \rightarrow 2C, 2p \rightarrow 1C, q_1, f_1, f_2, g_1, g_2$ 分别为对应节点之间传递的对数似然比 (LLR)。

由式(17)可知, 在 $n_c = 2$ 的 H-ARQ 信道上, 第 l 次迭代的 LLR 表示为

$$A_l \propto \xi \alpha_1^2 + \zeta \alpha_2^2 \quad (24)$$

即 A_l 正比于 $\xi \alpha_1^2 + \zeta \alpha_2^2$, 其中, ξ 为从 $2i \rightarrow 1C$ 的能量系数, ζ 为 $1i \rightarrow 2C$ 的能量系数, α_1, α_2 衰落系数。

假设 $2i$ 中的信息比特 θ 在传输过程中发生错误, $2i$ 与 δ 个校验节点相连, δ 中有 ξ 个来自 1C 的校验节点被用来纠正 θ , ξ 被称为能量系数, 显然 ξ 越大, 纠错能力越强。如 1C 中与信息比特 θ 相连的校验节点 Φ 用来纠正 θ , 则与 Φ 相连的其他节点已知。如图 5 所示, 这些节点来自 $2i$ 或 $2p$, 即 $2p$ 中的一些奇偶校验比特在若干次迭代后未被删除 (全分集奇偶校验比特)。能量系数和这些未被删除的全分集奇偶校验比特有关, 假设第 m 次迭代时全分集奇偶校验比特所占比

例为 p_m 。

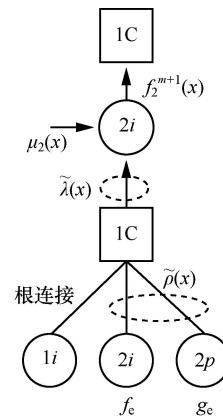


图5 信息比特 $2i$ 局部 Tanner 图

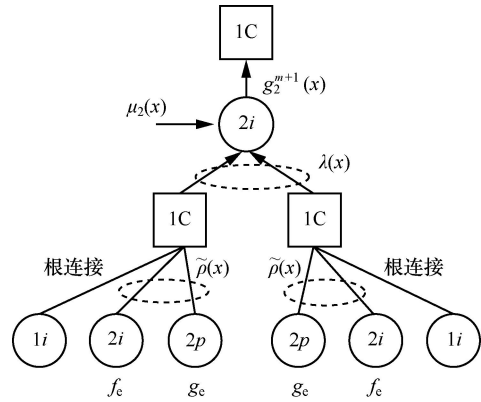


图6 奇偶校验比特 $2p$ 局部 Tanner 图

奇偶校验比特 $2p$ 的局部 Tanner 图如图 6 所示, 1C 的叶子节点随机来自 $2i$ 和 $2p$, 其概率分别为 f_e 和 g_e 。度数为 j 的根校验节点 1C 与叶子节点之间没有奇偶校验比特相连的概率为 f_e^{j-2} , 由迭代译码过程可知

$$p_{m+1} = 1 - \lambda(1 - \tilde{\rho}(f_e + (1 - f_e)p_m)) \quad (25)$$

式(25)给出了全分集奇偶校验比特所占比例的

迭代过程。

从 $2i$ 局部 Tanner 图 5 可知, 经过大量迭代后, 信息比特 $2i$ 全部被纠正, 信息比特 $1i$ 以及奇偶校验比特 $1p$ 未被全删除, 奇偶校验比特 $2p$ 有 p_∞ 的概率被恢复, $1-p_\infty$ 的概率被删除。如果信息比特 $2i$ 的度数为 $\delta+2$, 其中, $0 \leq \delta \leq d_b-2$ 。因此, 能量系数满足 $1 \leq \xi \leq d_b-1$ 。考虑根校验节点 1C, 假设 j 为根校验节点 1C 的度, l 为从奇偶校验比特 $2p$ 输入的 $j-2$ 个边中已经恢复的节点。则度数为 j 的校验节点 1C 产生 α^2 消息的概率为

$$\sum_{l=0}^{j-2} \binom{j-2}{l} f_c^{j-2-l} (1-f_c)^l p_\infty^l = (f_c + (1-f_c)p_\infty)^{j-2} \quad (26)$$

用 Γ_c 表示 1C 发送给 $2i$ 的消息未被删除的平均概率, 通过 $\tilde{\rho}(x)$ 平均后, 有

$$\Gamma_c = \sum_{j=2}^{d_c} \tilde{\rho}_{j-1} (f_c + (1-f_c)p_\infty)^{j-2} = \tilde{\rho}(f_c + (1-f_c)p_\infty) \quad (27)$$

用 $P_\infty(\xi, \delta)$ 表示度数为 $(\delta+2)$ bit 的节点 $2i$, 能量系数为 ξ 的概率质量函数, 则有

$$P_\infty(\xi, \delta) = \binom{\delta}{\xi-1} \Gamma_c^{\xi-1} (1-\Gamma_c)^{\delta-\xi+1} \quad (28)$$

经过 $\tilde{\lambda}(x)$ 平均后, 有

$$P_\infty(\xi) = \sum_{\delta=0}^{d_b-2} \tilde{\lambda}_{\delta+1} \binom{\delta}{\xi-1} \Gamma_c^{\xi-1} (1-\Gamma_c)^{\delta-\xi+1} \\ = \left(\frac{\Gamma_c}{1-\Gamma_c} \right)^{\xi-1} \sum_{i=1}^{d_b-1} \binom{i-1}{\xi-1} \tilde{\lambda} (1-\Gamma_c)^{i-1} \quad (29)$$

其中, $1 \leq \xi \leq d_b-1$ 。

式(29)给出了能量系数概率取值的下限与 p_∞ 的关系。可以看到 p_∞ 越大, 能量系数越大。因此可以通过控制 p_∞ , 增加全分集奇偶校验比特的比例来提高系统性能。这里采用和信息比特相同的方法, 将图 1 中的奇偶校验比特 $1p$ 分成 2 部分, 分别称为 “ $1pi$ ” 和 “ $1pp$ ”。其中, “ $1pp$ ” 又可以进一步分割成 “ $1ppi$ ” 和 “ $1ppp$ ”。由前面的分析可知:

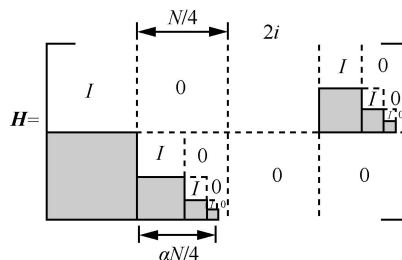


图 8 二阶根校验全分集 LDPC 校验矩阵结构

“ $1pi$ ” 和 “ $1ppi$ ” 的部分都获得了全分集。 $2p$ 也可以采用同样的处理方法进行处理。如图 7 所示。

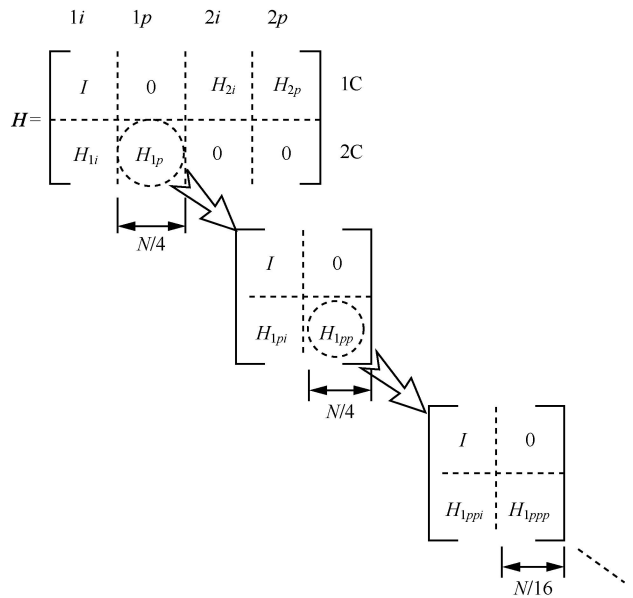


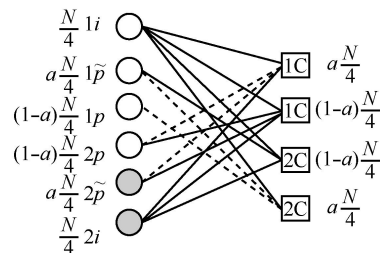
图 7 奇偶校验比特 $1p$ 分割

重复上述分割过程, 使得 α 部分的奇偶校验比特具有二阶的根校验, 如图 8 所示, 称为二阶根校验全分集 LDPC 码。显然, 第 1 次分割时, $\alpha=1/2$, 第 2 次分割时, $\alpha=1/2+1/4$, 第 3 次分割时, $\alpha=1/2+1/4+1/8$, 因此, 随着迭代分割的增加, $\alpha=1/2+1/4+1/8+\dots$, 越来越趋近于 1, 称为全分集奇偶校验比特。

5 性能分析

考察了构造码字在 H-ARQ 信道上的 WER 性能。实验中, 采用 BPSK 调制, 噪声 $z_i \sim N(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = N_0/2$, 每次重传信道的衰落 α_j 服从独立的瑞利分布, 译码采用 BP 迭代译码算法, 最大迭代次数 50 次。每次重传的码字长度一样 $N=4000$, 信息长度 $K=2000$, n_c 为传输次数, 即重传次数为 n_c-1 。令 $\mathbf{H}_1 = [\mathbf{H}_{1i} \ \mathbf{H}_{1p}]$, $\mathbf{H}_2 = [\mathbf{H}_{2i} \ \mathbf{H}_{2p}]$, $\mathbf{H}_3 = [\mathbf{H}_{3i} \ \mathbf{H}_{3p}]$, \dots

图 9 给出了随机构造的(3,6)LDPC 码的, 规则



的(3,6)根校验全分集 LDPC 码 (记 root-LDPC), 以及非规则的(3,6)根校验全分集 LDPC 在 1 次重传情况下的 WER 性能, 即 H_1, H_2 满足上述结构。其中, 非规则 LDPC 码的度数分布采用与文献[13]相同的度数分布。从图可以看出, 不论是非规则 root-LDPC 还是规则 root-LDPC 都能取得全分集, 非规则 LDPC 码性能要略优于规则(3,6)码性能。在 WER 为 10^{-4} 时, 大概有 0.32dB 的改善。非规则 root-LDPC 码与中断限之间的间隔为 0.63dB。

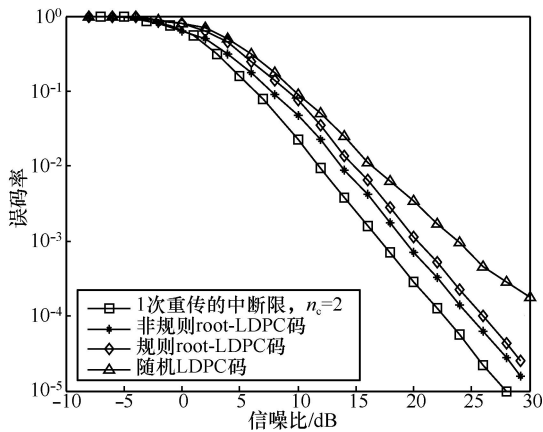


图 9 H-ARQ 信道上不同码字性能比较 ($n_c=2$)

图 10 比较了 H-AQR 信道上不同传输次数码字的性能, 仿真了传输次数分别为 2, 3, 4 的情况, 实验中码率 R 分别为 1/2, 1/3, 1/4, 可以看到, 传输次数的增加使得码字获得更多的分集增益, 这是因为在译码过程中, 信息节点和校验节点都从其他的块衰落信道上获得了更多的校验, 从而获得更多

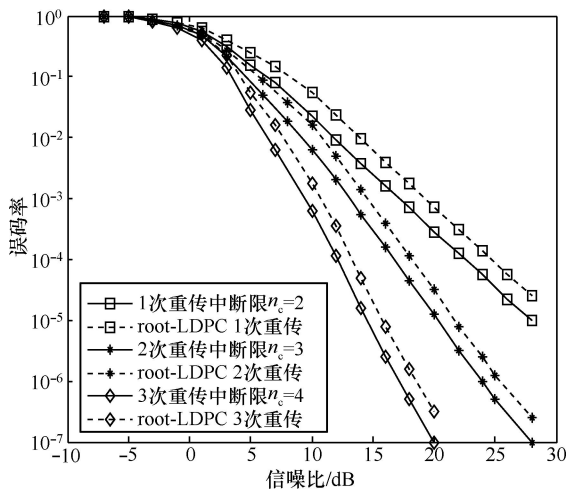


图 10 H-ARQ 信道上不同传输次数码字性能分析

的分集, 并且从图上可以看出不论传输次数为 2, 3

还是 4, 都能获得全分集。

图 11 和图 12 分别给出了采用本文方法构造的二阶全分集 LDPC 码字的性能。分别仿真了二阶根校验 root-LDPC 码 $a=1/2$, 以及普通 root-LDPC 码字的性能。其中, 图 11 仿真了 $n_c=2$, 图 12 仿真了 $n_c=3$ 的情况下, 采用上述方法构造的(3,6)全分集 LDPC 码。由图可见二阶全分集码字获得了编码增益, 具有更加优异的性能。这是因为采用了二阶全分集技术, 增加全分集奇偶校验比特的比例, 这些奇偶校验比特在迭代译码过程中向信息节点传递信息, 增加了能量系数, 从而改善了码字性能。

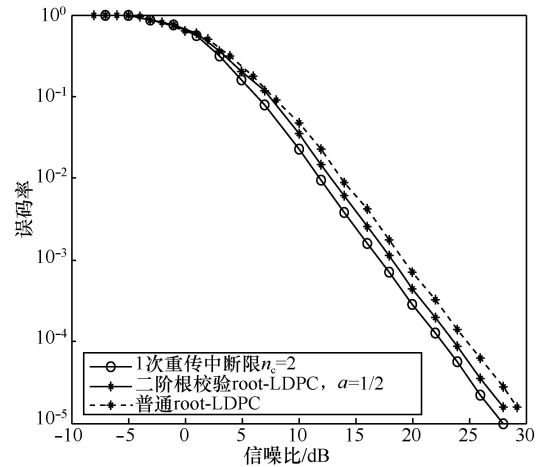


图 11 H-ARQ 信道上二阶根校验全分集 LDPC 性能 ($n_c=2$)

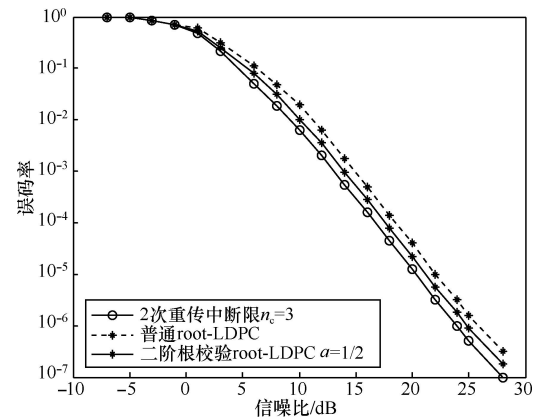


图 12 H-ARQ 信道上二阶根校验全分集 LDPC 性能 ($n_c=3$)

图 13 给出了本文所提出算法与文献[9,10]算法的性能比较, 实验中采用 BPSK 调制, 码长 $N=2000$, BP 译码的最大迭代译码次数 50 次。首先, 比较了本文所提的算法在 $n_c=2$ 时的性能与文献[9]中采用 CPC 的 H-ARQ 性能, 可以看到, 无论是本文所提算法还是文献[9]所提算法都能取得全分集, 由于基于 CPC 的 H-ARQ 在重传过程中增加了

更多的冗余信息，性能优于本文构造的根校验全分集 LDPC 码，但要稍逊于本文提出的二阶根校验 LDPC 码($a = 3/4$)，同时 ARQ 会导致传输延时增加。其次，比较了本文所提的算法在($n_c = 4, R = 1/4$)情况下的性能与文献[10]中采用校验分割的码字在块衰落数目为 2，重传次数为 2(即 $R_1 = 1/2, L = 2, B = 2$)下的性能，可以看到两者都能取得全分集，分集阶数均为 4。但是由于文献[10]在重传过程中，只是简单的重复编码，并没有带来编码增益，因此，本文算法的性能优于文献[10]中的码字性能。

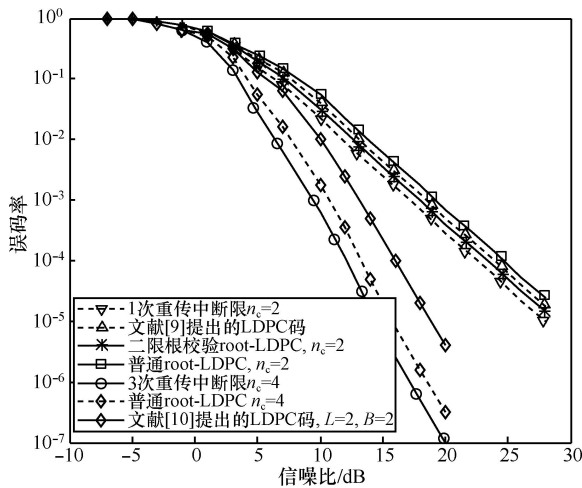


图 13 本文构造码字与文献[9,10]码字在 H-ARQ 信道上的性能比较

6 结束语

本文研究了 H-ARQ 块衰落信道上全分集低密度奇偶校验 (LDPC) 码的构造与性能，然后构造了在 H-ARQ 块衰落信道上能取得全分集的 LDPC 码，新构造的码字采用根校验节点把每次传输联系起来，从而获得全分集。在此基础上，提出了通过提高全分集校验比特的比例，改善全分集 LDPC 码在 H-ARQ 信道上编码增益的方法。仿真结果表明，所提算法在 H-ARQ 信道上不仅能取得全分集，而且具有较高的编码增益。

参考文献:

[1] LIN S, COSTELLO D J. Error Control Coding[M]. Pearson Prentice Hall, 2004.
 [2] BOUTROS J J, FABREGAS A G, BIGLIERI E. Design and analysis of low-density parity-check codes on block-fading channels[a]. IEEE Information Theory and Applications Workshop[C]. San Diego, USA, 2007.211-215.
 [3] LI J, YUAN J H, AZMI M H. Novel LDPC code structures for the

nonergodic block-fading channels[A]. 6th IEEE International Symposium on Turbo Codes & Iterative Information Processing[C]. Brest, France, Sep. 2010:209-214
 [4] LI Y Q, SALEHI M. Quasi-cyclic LDPC code design for block-fading channels[A]. 44th IEEE Annual Conference on Information Sciences and Systems[C]. Princeton, USA, 2010.1-5.
 [5] ANDRIYANOVA I, BIGLIERI E, BOUTROS J J. Outage thresholds of LDPC codes over nonergodic block-fading channels[A]. European Wireless Conference[C]. Lucca, Italy, 2010. 1011-1014.
 [6] BOUTROS J J, FABREGAS A G, BIGLIERI E. Low-density parity-check codes for nonergodic block-fading channels[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(9): 4286-4295.
 [7] ANDRIYANOVA I, BOUTROS J J, BIGLIERI E. Block-error performance of root-LDPC codes[A]. International Zurich Seminar on Communications Proceedings[C]. Zurich, Switzerland, 2010.94-97.
 [8] CHUI J, CHINDAPOL A. Design of cross-packet channel coding with low-density parity-check codes[A]. IEEE Information Theory Workshop on Information Theory for Wireless Networks[C]. Solstrand, 2007.1-5.
 [9] DUYCK D, CAPIRONE D, HAUSL C. Design of diversity-achieving LDPC codes for H-ARQ with cross-packet channel coding[A]. 21th IEEE Annual International Symposium on Personal, Indoor and Mobile Radio Communications[C]. Istanbul, Turkey, 2010.211-217.
 [10] KAMBHAMPATI S, LECHNER G, CHAN T. Check splitting of root-check LDPC codes over ARQ block-fading channels[A]. Australian Communications Theory Workshop[C]. Canberra, Australia, 2010. 21-27
 [11] MAHAM B, HJORUNGNES A, DEBBAH M. Outage probability analysis of multi-relay delay-limited hybrid-ARQ channels[A]. 72nd IEEE Vehicular Technology Conference Fall (VTC 2010-Fall)
 [12] TUMULA V K, LARSSON E G. Outage-optimal power allocation for hybrid ARQ with incremental redundancy[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2011,10(7), 2069-2074,
 [13] CHEN J H, FOSSORIER M P C. Decoding low-density parity-check codes with normalized APP-based algorithm[A]. IEEE Global Telecommunications Conference[C]. San Antonio, USA, 2001.1026-1030.

作者简介:



郭锐 (1980-), 男, 湖北十堰人, 博士, 杭州电子科技大学讲师, 主要研究方向为无线通信和信道编码。

胡方宁 (1976-), 女, 浙江杭州人, 博士后, 杭州电子科技大学讲师, 主要研究方向为信道编码。

刘济林 (1947-), 男, 浙江杭州人, 浙江大学教授、博士生导师, 主要研究方向为多媒体通信和信号处理。